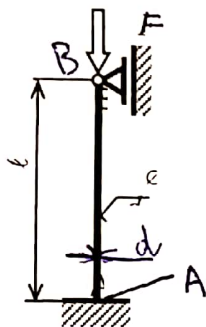


Pružnost a pevnost



Svislá vzpěra kruhového průřezu o průměru d a délce l je v bodě A pevně vetknuta kloubově a v bodě B je uložena posuvně. Na svém horním konci (bod B) je zatížena osamělou silou F .

čtvercový průřez

$$J = \frac{1}{12} d^4$$

$$A = a^2$$

mez úměrnosti

Dáno:

$\sigma_K = R_e = 260 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, $\sigma_u = R_u = 200 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, $l = 600 \text{ mm}$, $d = 12 \text{ mm}$ a $k_\varepsilon = 3$.

Určete:

1. Velikost kritické Eulerovy síly F_{kr} a velikost kritického napětí σ_{kr} při ztrátě stability,
2. Velikost dovolené provozní síly F_D a velikost provozního napětí σ_D .

Řešení:

kruhový průřez

$$F_{kr} = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \pi \cdot d^4}{64 \cdot l^2} = 2 \cdot \frac{\pi^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 12^4}{64 \cdot 600^2} = 11162,26 \text{ N}$$

$$F_{kr} = \pi \cdot \frac{J \cdot E \cdot \pi^2}{l^2}$$

obecně

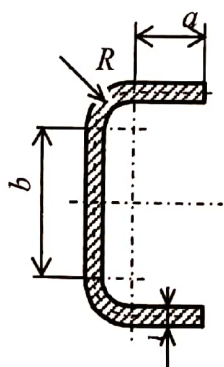
$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{4 \cdot F_{kr}}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 11162,26}{\pi \cdot 12^2} = 98,7 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} < \sigma_u \Rightarrow \text{platí Euler}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64}$$

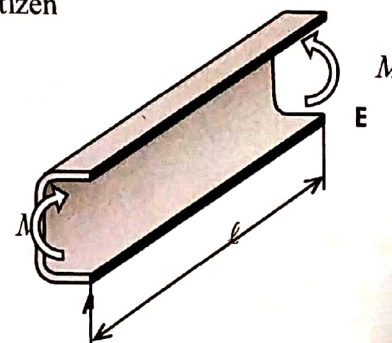
$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_\varepsilon} = \frac{11162,26}{3} = 3720,75 \text{ N}$$

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A} = \frac{4 \cdot F_D}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 3720,75}{\pi \cdot 12^2} = 32,9 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$$



Z pásu $h \times l$ ocelového plechu tloušťky t byl vylisován profil podle obrázku. Profil je na obou koncích (body A a B) zatížen krutícím momentem M_K .



Dáno:

$h = 130 \text{ mm}$, $\ell = 1\,200 \text{ mm}$, $t = 4 \text{ mm}$, $R \approx 15 \text{ mm}$, $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ a $M_K = 2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}$
($a = 25 \text{ mm}$, $b = 33 \text{ mm}$).

Určete:

1. Maximální smykové napětí $\tau_{\max}$ vznikající v tomto profilu při volném kroucení.
(případnou koncentraci napětí v místech zaoblení profilu neuvažujte!)
2. Vzájemné natočení φ_{A-B} konců tohoto prutu (body A a B) při volném kroucení.

Řešení: charakteristika průřezu

$$J_K = \frac{1}{3} \cdot h \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot 130 \cdot 4^3 = 2\,773,3 \text{ mm}^4$$

$$W_K = \frac{1}{3} \cdot h \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 130 \cdot 4^2 = 693,3 \text{ mm}^3$$

$W_K = \text{modul průřezu v kroucení}$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{2 \cdot 10^4}{693,3} = 28,85 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$\varphi_{A-B} = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J_K} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1\,200}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 2\,773,3} = 0,108 \text{ rad} \approx 6,2^\circ$$

$$1 \text{ rad} \approx \frac{180}{\pi}$$

$$0,108 \cdot \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{6,2^\circ}}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$\frac{180}{\pi} \approx 1 \text{ rad}$$

$$\times \dots 0,108$$

$$Dg = \int \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$$

$$Dg - dG(x) = 0$$

Pružnost a pevnost

3

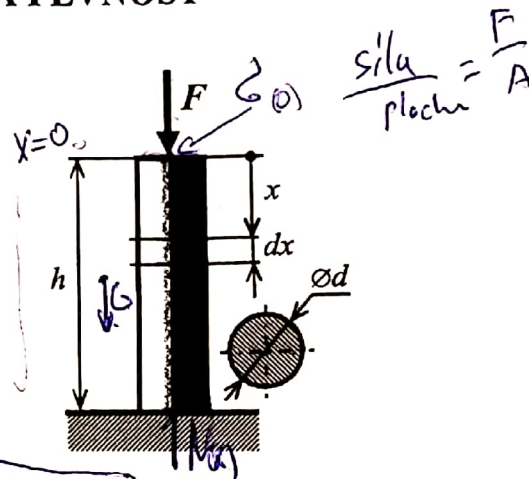
MECHANIKA KONTINUA – PRUŽNOST A PEVNOST

Ocelový (E, ρ) sloupek je zatížen osamělou tlakovou silou F .

Dáno: F, ρ, E, g, h, d

Vypočítat:

1. Sestavte rovnici rovnováhy elementu délky dx a z ní stanovte rovnici průběhu napětí $\sigma(x)$ po celé délce sloupku.
2. Vypočítejte extrémní hodnotu napětí σ .



Řešení:

Rovnice rovnováhy: $\sigma(x) \cdot A + [\sigma(x) + d\sigma(x)] \cdot A - dG = 0$ a $dG = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$

Dosazení: $-d\sigma(x) \cdot A = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx \Rightarrow d\sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot dx \Rightarrow \sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot x + C$

Okrajová podmínka: $\sigma(0) = -\frac{F}{A} \Rightarrow C = -\frac{F}{A} \Rightarrow 1. \sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot x - \frac{F}{A}$ za $x=0$

Maximální napětí: $\sigma_{\max} = |\sigma(h)| = \left| -\rho \cdot g \cdot h - \frac{F}{A} \right| \Rightarrow 2. \sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot h$

maximální napětí $\rightarrow$ za x delka h

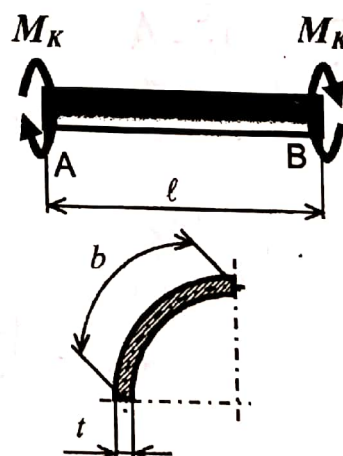
$$\begin{aligned} G(x) &= -\rho \cdot g \cdot x + C \\ -\frac{F}{A} &= -\rho \cdot g \cdot 0 + C \end{aligned}$$

Ocelový prut vylišaný z plechu tloušťky t o rozměrech $b \times \ell$ (viz obrázek) je namáhán kroutícím momentem M_K .

Dáno: $t = 3 \text{ mm}, b = 60 \text{ mm}, \ell = 0,7 \text{ m}, G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$
 $M_K = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$

Vypočítejte:

1. Maximální smykové napětí $\tau_{\max}$ při volném kroucení.
2. Vzájemné natočení konců prutu φ_{A-B} při volném kroucení. (Koncentraci vlivem zakřivení ve výpočtech zanedbejte!)



Řešení:

Průřez. charakter.: $J_K = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3^3 = 540 \text{ mm}^4$ a $W_K = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3^2 = 180 \text{ mm}^3$

Maximální napětí: $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{15000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{180 \text{ mm}^3} \Rightarrow 1. \tau_{\max} = 83,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$

Natočení konců: $\varphi_{A-B} = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J_K} = \frac{15000 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 700 \text{ mm}}{0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \cdot 540 \text{ mm}^4} \Rightarrow 2. \varphi_{A-B} = 0,24 \text{ rad} \approx 13,75^\circ$

$$\text{KURT } J = \frac{1}{3} h t^3 = W_k$$

$$\bar{\sigma} = \frac{M_k}{W_k}$$

$$\varphi(A-B) = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J}$$

4

$$\bigcirc J = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\square \frac{1}{12} a^4$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A = a^2$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$$

$$\bar{\sigma}_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_z}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right] \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

E_k - kin en
t - čas

$$\square a^2 = A$$

$$\frac{1}{12} a^4 = J$$

$$\bigcirc A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$J = \frac{1}{3} h t^3 = W_k$$

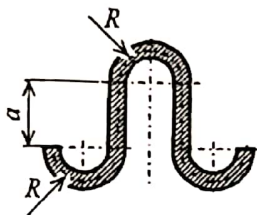
$$\bar{\sigma} = \frac{M_k}{W_k}$$

$$\varphi(A-B) = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 J \cdot E}{l^2}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_z}$$



B2: Z pásu $h \times \ell$ ocelového plechu tloušťky t byl vyhlisován profil dle obrázku. Profil je na obou koncích (body A a B) zatížen krouticím momentem M_K .

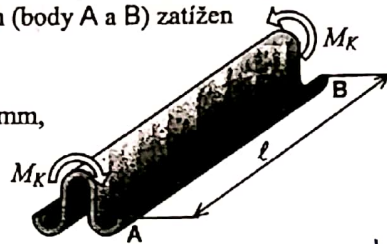
Dáno:

$$h = 134 \text{ mm}, \ell = 1200 \text{ mm}, t = 3 \text{ mm},$$

$$R \approx 10 \text{ mm}, a = 20 \text{ mm},$$

$$M_K = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{mm},$$

$$G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}.$$



Určete:

1. Maximální smykové napětí $\tau_{\max}$ vznikající v tomto profilu při volném kroucení,
2. Vzájemné natočení φ_{A-B} konců tohoto prutu (body A a B) při volném kroucení. (případnou koncentraci napětí v místech zaoblení profilu neuvažujte!)

$$J = \frac{1}{3} h \cdot t^3 = \frac{1}{3} 134 \cdot 3^3 = 1206 \text{ mm}^4$$

Proč to dosazuje J a proč to neobíhají 3???

2 proč neobíhají

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{J} \cdot t_{\max} = \frac{2,5 \cdot 10^4}{1206} \cdot 3 = 62,1891 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$$

$$\varphi_{AB} = \int_B^A \frac{M_K(x)}{G J(x)} dx = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J} = \frac{2,5 \cdot 10^4 \cdot 1200}{0,81 \cdot 10^5 \cdot 1206} = 0,3071 \text{ rad}$$

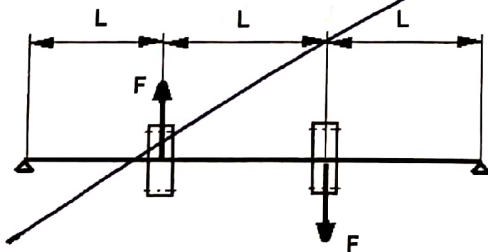
$$\varphi_{AB} = 17,59^\circ$$

Uprava

Části strojů

Otázka 1

Pro hřídel se 2 ozubenými koly mezi ložisky podle obrázku nakreslete průběh ohybového momentu v rovině, ve které působí nakreslené síly.



$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_K}{W_K} = \frac{M_K}{\frac{1}{3} h \cdot t^2} = \\ &= \frac{2,5 \cdot 10^4}{\frac{1}{3} \cdot 134 \cdot 3^2} = 62,18 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} \end{aligned}$$

$$\square A = a^2; J = \frac{1}{12} a^4$$

6

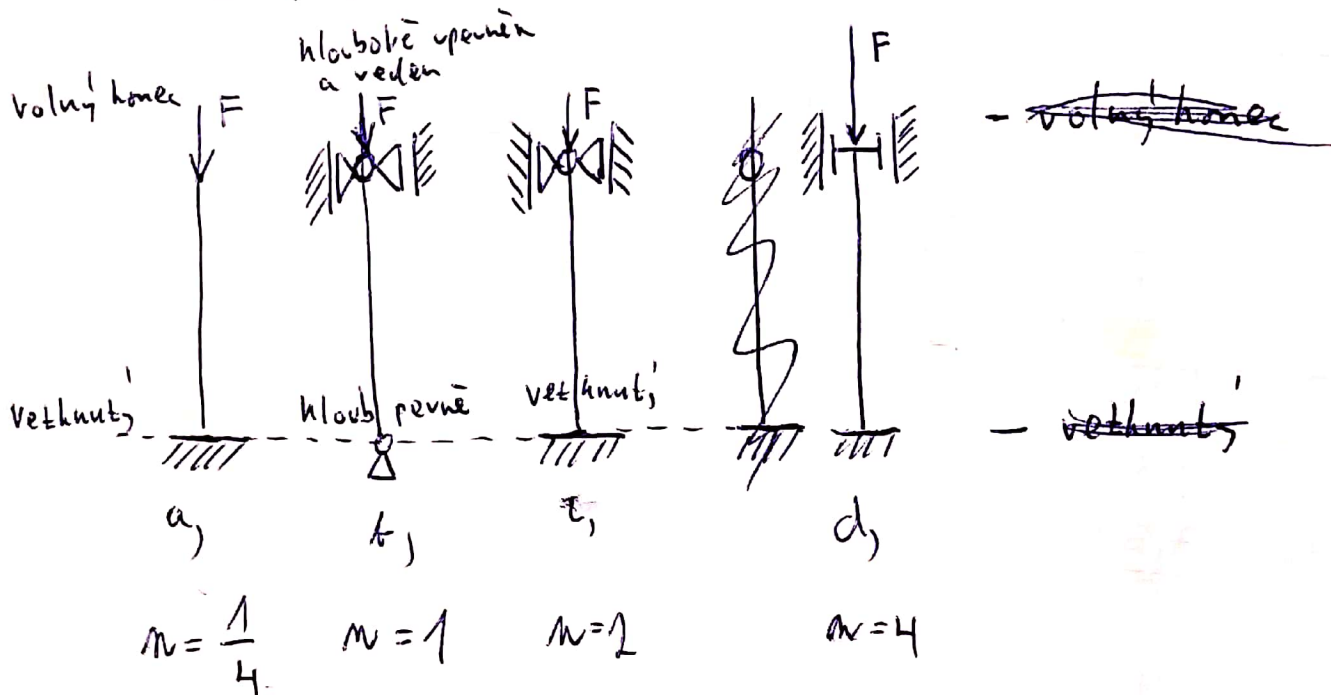
$$\bigcirc A = \frac{\pi d^2}{4}; J = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$F_{kr} = \frac{J E \pi^2}{l^2}$$

$$G_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_3}$$

Podminky (případy vzpěru)



Střihlostní poměr $\lambda = \frac{l}{i_{min}}$

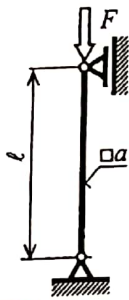
$$i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{A}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

$$\lambda_{mez} = \pi \sqrt{\frac{n \cdot E}{G_u}}$$

$$\lambda < \lambda_{mez}$$

Pružnost a pevnost



B1: Svislá vzpěra čtvercového průřezu o straně a a délce l je v bodě A uložena kloubově a v bodě B je uložena posuvně. Na svém horním konci (bod B) je zatížena osamělou silou F .

Dáno:

$\sigma_K = R_e = 280 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, $\sigma_u = R_u = 210 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$, $l = 500 \text{ mm}$, $a = 10 \text{ mm}$ a $k_e = 3,5$.

Určete:

1. Velikost kritické síly F_{kr} a velikost kritického napětí σ_{kr} při ztrátě stability,
2. Velikost dovolené síly F_D .

2. případ vzpěm ($n=1$)

$$J_0 = \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{12} \cdot 10^4 = 833,33 \text{ mm}^4$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E J_0}{l^2} = 1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 833,33}{500^2} = 6909 \text{ N}$$

viz 6

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{F_{kr}}{a^2} = \frac{6909}{10^2} = 69,09 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2} (\leq \sigma_u)$$

→ lze použít Eulerovu metodu ($\sigma_{kr} \leq \sigma_u$)

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_e} = \frac{6909}{3,5} = 1974 \text{ N}$$

$$J = \frac{1}{12} a^4$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_e}$$

$$F_{kr} = \frac{E \cdot J \cdot \pi^2}{l^2}$$

$$G_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

$$A = a^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

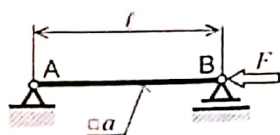
$$J_k = \frac{1}{3} b t^3$$

$$\frac{M_k}{W_k} = \sigma$$

$$\varphi_{(0-\infty)} = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J}$$

Pružnost a pevnost

$$A = a^2$$



Vodorovná vzpěra čtvercového průřezu o straně a a délce l je v bodě A uložena kloubově a v bodě B je uložena posuvně. Na svém pravém konci (bod B) je zatížena osamělou silou F (vlastní tíhu zanedbejte).

Dáno:

$$\sigma_k = R_c = 240 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}, \sigma_u = R_u = 180 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}, l = 900 \text{ mm}, a = 16 \text{ mm} \text{ a } k_e = 4.$$

Určete:

1. Velikost kritické Eulerovy síly F_{kr} a velikost kritického napětí σ_{kr} při ztrátě stability.
2. Velikost dovolené provozní síly F_D a velikost provozního napětí σ_D .

Řešení:

$$F_{kr} = 1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot a^4}{12 \cdot l^2} = 1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 16^4}{12 \cdot 900^2} = 16\,844,12 \text{ N}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{F_{kr}}{a^2} = \frac{16\,844,12}{16^2} = 65,8 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} < \sigma_u \Rightarrow \text{platí Euler}$$

$$F_D = \frac{F_{kr}}{k_e} = \frac{16\,844,12}{4} = 4\,211,03 \text{ N}$$

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A} = \frac{F_D}{a^2} = \frac{4\,211,03}{16^2} = 16,4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

čtvercový
průřez !

$$F_{KR} = \frac{J E \pi^2}{l^2}$$

$$\sigma_{KR} = \frac{F_{KR}}{A}$$

$$F_D = \frac{F_{KR}}{k_s}$$

g

$$\square A = a^2$$

$$J = \frac{1}{12} a^4$$

$$\circ A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\frac{1}{3} h t^3 \Rightarrow = W_k$$

$$\frac{M_k}{W_k} = \sigma$$

$$\rho(\sigma) = \frac{M_k l}{6 J}$$

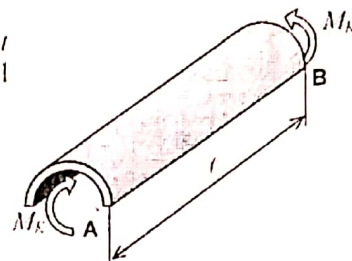
$$W_k = \frac{1}{3} h \cdot t^2$$

$$J = \frac{1}{3} h \cdot t^3$$

$$\sigma = \frac{M_k}{W_k}$$



Z pásu $h \times t$ duralového plechu tloušťky t byl vylisován profil podle obrázku. Profil je na obou koncích (body A a B) zatížen kroutícím momentem M_k .



Dáno:

$h = 157 \text{ mm}$, $l = 600 \text{ mm}$, $t = 4 \text{ mm}$, $R \approx 50 \text{ mm}$, $G = 0,26 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ a $\tau_D = 30 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$.

Určete:

1. Maximální dovolený krouticí moment M_{kD} , který může profil přenést.
2. Vzájemné natočení ϕ_{A-B} konců tohoto prutu (body A a B) při volném kroucení a zatížení M_{kD} . (případnou koncentraci napětí v důsledku zaoblení profilu neuvažujte!)

Řešení:

$$W_k = \frac{1}{3} \cdot h \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 157 \cdot 4^2 = 1308,3 \text{ mm}^3$$

$$M_{kD} = \tau_D \cdot W_k = 30 \cdot 1308,3 = 3,925 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$J_k = \frac{1}{3} \cdot h \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot 157 \cdot 4^3 = 6541,7 \text{ mm}^4$$

$$\phi_{A-B} = \frac{M_{kD} \cdot l}{G \cdot J_k} = \frac{3,925 \cdot 10^4 \cdot 600}{0,26 \cdot 10^5 \cdot 6541,7} = 0,138 \text{ rad} \approx 7,93^\circ$$

$$M_{kD} = \tau_D \cdot W_k$$

Části strojů

Vypočítejte rozměry ozubeného soukolí s přímými zuby. Určete osovou vzdálenost a , průměry roztečných kružnic d_1 , d_2 , průměry hlavové, patní a základní kružnice pro obě kola (d_a , d_f , d_b) pro zadané hodnoty:

Zadání A

Modul $m = 2$

Převodový poměr $i = 2,53$

Počet zubů $z_1 = 19$,

Součinitele posunutí profilu $x_1 = +0,1$

$x_2 = 0$

Zadání B

Modul $m = 2$

Převodový poměr $i = 2,68$

Počet zubů $z_1 = 19$,

Součinitele posunutí profilu $x_1 = 0$

$x_2 = +0,1$

Vzorce použité pro výpočet:

$d = m \cdot z$, $d_a = d + 2m(h_a^* + 2mx)$, $d_f = d - 2m(h_a^* + c^*) + 2mx$, $d_b = d \cdot \cos \alpha$,
 $h_a^* = 1$, $c^* = 0,25$, $\alpha = 20^\circ$

Pružnost a pevnost

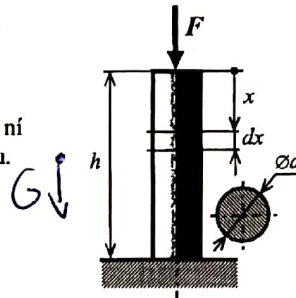
MECHANIKA KONTINUA – PRUŽNOST A PEVNOST

Ocelový (E, ρ) sloupek je zatížen osamělou tlakovou silou F .

Dáno: F, ρ, E, g, h, d

Vypočítat:

1. Sestavte rovnici rovnováhy elementu délky dx a z ní stanovte rovnici průběhu napětí $\sigma(x)$ po celé délce sloupku.
2. Vypočítejte extrémní hodnotu napětí σ .



Řešení:

Rovnice rovnováhy: $\sigma(x) \cdot A - [\sigma(x) + d\sigma(x)] \cdot A - dG = 0$ a $dG = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$

Dosažení: $-d\sigma(x) \cdot A = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx \Rightarrow d\sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot dx \Rightarrow \sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot x + C$

Okrajová podmínka: $\sigma(0) = -\frac{F}{A} \Rightarrow C = -\frac{F}{A} \Rightarrow 1. \sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot x - \frac{F}{A}$

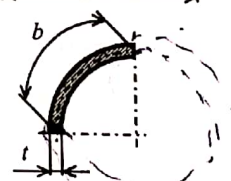
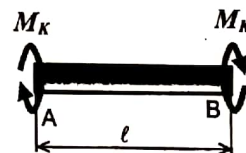
Maximální napětí: $\sigma_{\max} = |\sigma(h)| = \left| -\rho \cdot g \cdot h - \frac{F}{A} \right| \Rightarrow 2. \sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot h$

Ocelový prut vyhlisovaný z plechu tloušťky t o rozměrech $b \times \ell$ (viz obrázek) je namáhán kroučícím momentem M_K .

Dáno: $t = 3 \text{ mm}, b = 60 \text{ mm}, \ell = 0,7 \text{ m}, G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$
 $M_K = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$

Vypočítejte:

1. Maximální smykové napětí $\tau_{\max}$ při volném kroucení.
2. Vzájemné natočení konců prutu φ_{A-B} při volném kroucení. (Koncentraci vlivem zakřivení ve výpočtech zanedbejte!)



Řešení:

Průřez. charakter.: $J_K = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3^3 = 540 \text{ mm}^4$ a $W_K = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3^2 = 180 \text{ mm}^3$

Maximální napětí: $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{15000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{180 \text{ mm}^3} \Rightarrow 1. \tau_{\max} = 83,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$

Natočení konců: $\varphi_{A-B} = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J_K} = \frac{15000 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 700 \text{ mm}}{540 \text{ mm}^4 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}} \Rightarrow 2. \varphi_{A-B} = 0,24 \text{ rad} \approx 13,75^\circ$

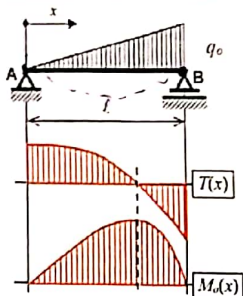
Rozdíl mezi
prutem z tenkého
plechu a
tenkostěnnou
trubkou

Pružnost a pevnost

Varianta A

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE – FAKULTA STROJNÍ
PŘÍJÍMACÍ ZKOUŠKY DO NAVAZUJÍCÍHO MAGISTERSKÉHO STUDIA

Jméno	Příjmení	Datum narození
-------	----------	----------------



Nosník čtvercového průřezu o straně c a délce l je kloubově uložen v bodě A a posuvně v bodě B. Zatížen je po celé délce trojúhelníkovým spojitým zatížením o maximální hodnotě q_0 (viz obrázek).

Dáno:

$l = 500 \text{ mm}$ a $q_0 = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$

Určete:

1. Pomocí Schwedlerovy věty průběhy posouvající síly $T(x)$ a ohybového momentu $M_0(x)$ po celé délce nosníku.
2. Polohu a velikost maximálního ohybového momentu $M_{0 \max}$.
3. Načrtněte pod obrázkem vypočtené průběhy posouvající síly $T(x)$ a ohybového momentu $M_0(x)$ po celé délce nosníku.

Reakce

$$q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{l}$$

Schwedlerova věta:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) = -q_0 \cdot \frac{x}{l} \rightarrow dT(x) = -q_0 \cdot \frac{x}{l} \cdot dx$$

$$T(x) = \int -q_0 \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = -q_0 \cdot \frac{x^2}{2l} + C_1$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = +T(x) = -q_0 \cdot \frac{x^2}{2l} + C_1 \rightarrow dM(x) = \left(-q_0 \cdot \frac{x^2}{2l} + C_1\right) \cdot dx$$

$$M_0(x) = \int \left(-q_0 \cdot \frac{x^2}{2l} + C_1\right) \cdot dx = -q_0 \cdot \frac{x^3}{6l} + C_1 \cdot x + C_2$$

Okrajové podmínky:

$$1) M_0(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$2) M_0(l) = 0 \rightarrow C_1 = q_0 \cdot \frac{l^2}{6}$$

$$T(x) = -q_0 \cdot \frac{x^2}{2l} + q_0 \cdot \frac{l^2}{6} \rightarrow R_A = q_0 \cdot \frac{l^2}{6} \text{ a } R_B = -T(l) = q_0 \cdot \frac{2l^2}{6}$$

$$T(x_1) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$M_0(x) = q_0 \cdot \left(\frac{l^2}{6} - \frac{x^3}{6l}\right) \rightarrow M_{0 \max} = M_0\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = q_0 \cdot \frac{l^2}{9\sqrt{3}} \approx 0,06415 \cdot q_0 \cdot l^2$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q_0 \cdot \frac{x}{l} \quad | \quad dx$$

$$dT(x) = -q_0 \cdot \frac{x}{l} \cdot dx$$

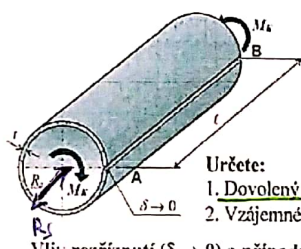
$$\int -q_0 \cdot x \cdot \frac{1}{l} dx = -\frac{q_0}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$C_2 = 0, M_0(l) = 0$$

$$0 = -q_0 \cdot \frac{l^3}{6l} + C_1 l + 0$$

$$C_1 = q_0 \cdot \frac{l^2}{6}$$

2)



Profil vzniklý podélným rozříznutím tenkostěnná trubka ($R_s \gg t$) je na obou koncích (body A a B) zatížen kroučícím momentem M_K a je vyroben z oceli o modulu pružnosti ve smyku G a dovoleném napětí τ_D .

Dáno:

$R_s = 100 \text{ mm}$, $t = 3 \text{ mm}$ a $l = 1200 \text{ mm}$,

$G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ a $\tau_D = 60 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$.

Určete:

1. Dovolný kroučící moment M_{KD} , kterým může být profil zatížen při volném kroucení,
2. Vzájemné natočení φ_{A-B} konců tohoto prutu (body A a B) při volném kroucení.

Vliv rozříznutí ($\delta \rightarrow 0$) a případnou koncentraci napětí v profilu neuvažujte!

$$M_{KD} = \tau_D \cdot W_K = \tau_D \cdot \frac{J_K}{l} = \tau_D \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi R_s^3}{l} = \tau_D \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi \cdot 100^3}{1200} = 60 \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi \cdot 100^3}{1200} \approx 4200 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$G \cdot \varphi_D = \frac{M_{KD}}{J_K} = \frac{\tau_D}{l} \rightarrow \varphi_D = \frac{\tau_D}{G \cdot l} = \frac{60}{0,81 \cdot 10^5 \cdot 3} = 2,47 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

$$\varphi_{A-B} = \varphi_D \cdot l = 2,47 \cdot 10^{-4} \cdot 1200 \approx 0,3 \text{ rad} \approx 17^\circ$$

$$J_K = \frac{1}{2} \pi R^3$$

$$J_K = \frac{1}{3} \cdot 2 \pi R^3$$

$$M_{KD} = \tau_D \cdot \frac{J_K}{l} = \tau_D \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi R^3}{l} = \tau_D \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi \cdot 100^3}{1200} = 60 \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi \cdot 100^3}{1200}$$

$$M_0(x) = q_0 \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) + C_1 \cdot x + C_2 = 0$$

$$C_1 \cdot \ell + \delta_2^0 = 0$$

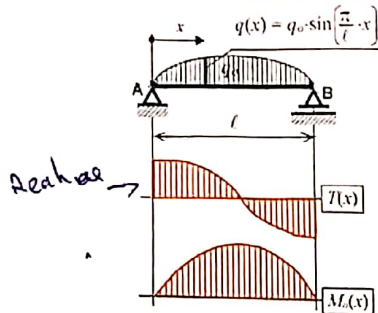
$$C_1 \ell = 0$$

Varianta B

13

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE – FAKULTA STROJNÍ
PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY DO NAVAZUJÍCÍHO MAGISTERSKÉHO STUDIA

JMENO	PŘÍJMENÍ	DATUM NÁPOZENÍ
-------	----------	----------------



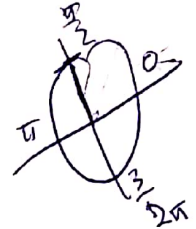
Nosník kruhového průřezu o průměru d a délce ℓ je kloubově uložen v bodě A a posuvně v bodě B. Zatižen je po celé délce sinusovým spojitým zatížením o maximální hodnotě q_0 uprostřed nosníku (viz obrázek).

Dáno:

$$\ell = 500 \text{ mm a } q_0 = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$$

Určete:

1. Pomocí Schwedlerovy věty průběhy posouvající síly $T(x)$ a ohybového momentu $M(x)$ po celé délce nosníku,
2. Polohu a velikost maximálního ohybového momentu $M_{0 \max}$,
3. Načrtněte pod obrázkem vypočtené průběhy posouvající síly $T(x)$ a ohybového momentu $M(x)$ po celé délce nosníku.



$$q(x) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right)$$

Schwedlerova věta:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) = -q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \rightarrow dT(x) = -q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot dx$$

$$T(x) = \int -q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot dx = q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) + C_1$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = +T(x) = q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) + C_1 \rightarrow dM(x) = \left(q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) + C_1\right) \cdot dx$$

$$M_0(x) = \int \left(q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) + C_1\right) \cdot dx = q_0 \cdot \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) + C_1 \cdot x + C_2$$

Okrajové podmínky:

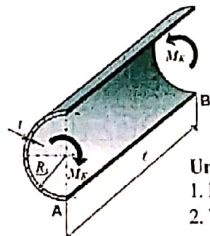
$$1) M_0(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$2) M_0(\ell) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$T(x) = q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \quad C_1 \ell = 0 \rightarrow R_A = T(0) = q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \quad a \quad R_B = -T(\ell) = q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi}$$

$$T(x_1) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{\ell}{2}$$

$$M_0(x) = q_0 \cdot \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) \rightarrow M_{0 \max} = M_0\left(\frac{\ell}{2}\right) = q_0 \cdot \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \approx 0,10132 \cdot q_0 \cdot \ell^2$$



Profil tvořený 1/2 tenkostěnné trubky ($R \gg t$) je na obou koncích (body A a B) zatížen kroutícím momentem M_K a je vyroben z oceli o modulu pružnosti ve smyku G a dovoleném napětí τ_D .

Dáno:

$$R = 100 \text{ mm, } t = 3 \text{ mm a } \ell = 1200 \text{ mm,}$$

$$G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} \text{ a } \tau_D = 60 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}.$$

Určete:

1. Dovolný krouticí moment M_{KD} , kterým může být profil zatížen při volném kroucení,
2. Vzájemné natočení φ_{A-B} konců tohoto prutu (body A a B) při volném kroucení.

Vliv případné koncentrace napětí v profilu neuvažujte!

$$M_{KD} = \tau_D \cdot W_K = \tau_D \cdot \frac{J_K}{t} = \tau_D \cdot \frac{\frac{1}{2} \pi R^3}{t} = \tau_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^3}{t} = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 100^3}{3} \approx 2100 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$G \cdot \varphi_D = \frac{M_{KD}}{J_K} = \frac{\tau_D}{t} \rightarrow \varphi_D = \frac{\tau_D}{G \cdot t} = \frac{60}{0,81 \cdot 10^5 \cdot 3} = 2,47 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

$$\varphi_{A-B} = \varphi_D \cdot \ell = 2,47 \cdot 10^{-4} \cdot 1200 \approx 0,3 \text{ rad} \approx 17^\circ$$

$$T(x) = \int -q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x\right) dx = \left| \text{sub: } t = \frac{\pi}{\ell} \cdot x \right. \\ \left. dx = \frac{dt}{\frac{\pi}{\ell}} = \frac{\ell}{\pi} \cdot dt \right| = \\ = \int -q_0 \cdot (\sin t) \cdot \frac{\ell}{\pi} dt = -q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot (-\cos t) + C = +q_0 \cdot \frac{\ell}{\pi} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{\ell} \cdot x\right)$$

$$M_{0 \max} = M_0\left(\frac{\ell}{2}\right) = q_0 \cdot \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2}\right) = q_0 \cdot \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2$$

